УДК 534.1

© **В. С. Метрикин**

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ НАСЛЕДСТВЕННОГО ТИПА

В работе рассматривается система дифференциальных уравнений (ДУ) с переменной структурой, описывающая автоколебания осциллятора, который парой сухого трения связан с основанием, движущимся с постоянной скоростью. Предполагается, что коэффициент трения относительного покоя f является кусочно-непрерывной функцией продолжительности t_k предшествующего интервала длительного контакта тела с основанием. Даётся классификация простейших периодических и установившихся стохастических решений рассматриваемого ДУ и построены области их существования в пространстве параметров. Подробно анализируются области в пространстве параметров, внутри которых существует периодические решения ДУ произвольной сложности. В частности, в явном виде строятся уравнения так называемых недостижимых границ, в малой окрестности которых существует счетное множество различных периодических решений.

ДУ движения рассматриваемой существенно нелинейной системы внутри интервала проскальзывания и длительного контакта имеют вид

$$m\ddot{X} + CX + f_* P\operatorname{sign}(X - V) = 0,\ \dot{X} \neq V,$$

$$\dot{X} = V,\ C\,|X| \leqslant fP,$$

где m — масса, P — вес тела, C — коэффициент жесткости пружины. Коэффициент трения относительного покоя f равен

$$f = f_* + (f^* - f_*)t_k/t^*,\ 0 < t_k < t^*,$$

$$f = f^*,\ t_k > t^*.$$

У т в е р ж д е н и е 1. *Исследование свойств решений рассматриваемой системы ДУ возможно изучить с помощью точечного отображения*

$$\Psi(\eta_{k+1}) = \varphi(\eta_k),$$

где

$$\begin{aligned}
&\Psi(\eta) = \lambda\eta - \varepsilon(\eta),\\
&\varphi(\eta) = 1 - (-1)^j(\varepsilon(\eta) - 2j + 1),\\
&2(j-1) < \varepsilon(\eta) < 2j \qquad (j = 1, 2, 3, \dots),\\
&\varepsilon(\eta) = \eta,\ 0 < \eta < \varepsilon_*,\\
&\varepsilon(\eta) = \varepsilon_*,\ \eta > \varepsilon_*,\\
&\lambda = \frac{V\sqrt{mc}}{Pf_*},\quad \varepsilon_* = \frac{f^*}{f_*} - 1,\quad \eta_k = t_k\frac{\varepsilon_*}{t^*}.
\end{aligned}$$

Величина j равна числу интервалов проскальзывания при $t_k < t < t_{k+1}$.

У т в е р ж д е н и е 2. *При $\lambda > 2$ всегда существует одна устойчивая неподвижная точка $\eta_0^* = 0$ отображения, соответствующая гармоническим колебаниям тела без зон длительного контакта.*

У т в е р ж д е н и е 3. *Простые устойчивые неподвижные точки η_i^* существуют только в области пространства параметров $\eta_i^* > \varepsilon_*$ и определяются из соотношения*

$$\eta_i^* = \lambda^{-1}(1 + \varepsilon_* - (-1)^i(\varepsilon_* - 2i + 1))$$

и им соответствуют $i/2$-оборотные решения системы ДУ с величиной длительного контакта η_i^*.

У т в е р ж д е н и е 4. *Простые неподвижные точки* η_k^{**} *, принадлежащие интервалам* $0 < \eta_k^{**} < \varepsilon_*$ *, неустойчивые и определяются через параметры системы в виде*

$$\eta_k^{**} = (1 + (-1)^{k+1}(1 - 2k))/(\lambda - 1 + (-1)^k)$$

$$(k = 2, 3, \dots).$$

У т в е р ж д е н и е 5. *Если* $2 < \varepsilon_* < 4$ $(j = 2)$ *, то при* $0 < \lambda < 4/\varepsilon_*$ *существует устойчивая* 1 *- оборотная периодическая траектория системы со временем* η_2^* *длительного контакта, при* $4/\varepsilon_* < \lambda < (2 + \varepsilon_*)/\varepsilon_*$ *существуют устойчивые циклы* n *- кратных точек преобразования* T^n*, при* $(2 + \varepsilon_*)/\varepsilon_* < \lambda < 2$ *реализуется* 1 *- оборотные стохастические траектории системы.*

У т в е р ж д е н и е 6. *Если* $4 < \varepsilon_* < 6$ $(j = 3)$ *, то при* $0 < \lambda < 2 - 4/\varepsilon_*$ *существует* $3/2$ *- оборотные устойчивые периодические траектории со временем* η_3^* *длительного контакта, при* $2 - 4/\varepsilon_* < \lambda < (2 + \varepsilon_*)/\varepsilon_*$ *наблюдаются циклы кратных точек преобразования* T^n *и, наконец, при* $(2 + \varepsilon_*)/\varepsilon_* < \lambda < 2$ *реализуется* 1 *- оборотный стохастический режим с длительными контактами.*

У т в е р ж д е н и е 7. *Устойчивые периодические* $j/2$ *- оборотные решения системы ДУ со временем* η_j^* *длительного контакта реализуются в областях пространства параметров* $G_{j/2}^p(2(j-1) < \varepsilon_* < 2j;\ 0 < \lambda < 2j/\varepsilon_*$ *при четных* j *и* $0 < \lambda < 2 - 2(j-1)/\varepsilon_*$ *при нечетных* $j)$ *.*

У т в е р ж д е н и е 8. *Циклы кратных точек существуют в областях* G_j^k *на плоскости параметров* λ, ε_* *, границы которых задаются соотношениями*

$$\lambda_s = 1 + 2/\varepsilon_* \quad \lambda_- = 2j/\varepsilon_*,\ \ j = 2, 4, 6, \dots,$$

$$\lambda_- = 2 - 2(j-1)/\varepsilon_*, \quad j = 3, 5, 7, \dots \ .$$

У т в е р ж д е н и е 9. $j/2$ *- оборотные стохастические траектории реализуются в областях* $G_{j/2}^s$ *между границами*

$$\lambda = 1 + 2/\varepsilon_*,$$

$$\lambda = 1 + 1/(j-1),\ \ (j = 2, 4, 6, \dots).$$

У т в е р ж д е н и е 10. *Удвоение кратности периода периодических траекторий системы происходит при переходе через границы* Γ_o^n *, уравнения которых имеют вид*

$$\varepsilon_*^n = \frac{4}{1 + a^{2^n}} \sum_{p=0}^{s} a^{(2^{2p}-1)} \prod_{k=2p+1}^{n-1} (1 - a^{2^k}),$$

где $s = n/2$ *при четных* n *,* $s = (n-1)/2$ *при нечетных* n *, а* ε_*^n *определяет* 2^n *- и* 2^{n+1} *- кратные периодические решения системы ДУ* $(n = 0, 1, 2, \dots)$, $a = \lambda - 1$ *.*

Метрикин Владимир Семенович
Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики нижегородского государственного ун-та им. Н. И. Лобачевского,
Россия, Нижний Новгород
e-mail: pmk@unn.ac.ru